



TITLE:

Information-based approachによるディーラーモデル(ファイナンスの数理解析とその応用)

AUTHOR(S):

近藤, 快地; 高田, 英行; 福田, 健太

CITATION:

近藤, 快地 ...[et al]. Information-based approachによるディーラーモデル(ファイナンスの数理解析とその応用). 数理解析研究所講究録 2019, 2111: 45-64

ISSUE DATE:

2019-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/251976>

RIGHT:

Information-based approach によるディーラーモデル

東邦大学理学部 情報科学科 近藤快地 高田英行 福田健太
Kaichi Kondou, Hideyuki Takada and Kenta Fukuda
Department of Information Sciences, Toho University

Abstract

Dorje Brody, Lane Hughston, Andrea Macrina 達による Information-based approach をディーラーモデルに応用したときの市場取引価格の確率的挙動について報告する。Brody, Hughston and Macrina [BHM07] は信用リスクの新しいモデルとして、「構造型アプローチ」の直感的で馴染みやすい長所と「誘導型アプローチ」のプライシング理論との親和性の高さの両面を志向した Information-based approach を提案した。このモデルは資産価格評価を主目的としたものであったが、情報の非対称性に着目したディーラーモデルやインサイダー情報のモデル化など、応用範囲の広いものとなっている。本研究では、Information-based approach に基づくディーラーモデルをより一般的な枠組みで論じている Nadi Serhan Aydın [Ay17] の手法を踏襲し、取引価格の挙動について数値的に詳細に調査した。特に、二人のディーラーが受け取る市場情報に相関がある場合、両者が提示するクォート価格がどのような挙動を示すか、取引成立確率、および取引価格の標本ボラティリティについて考察した結果を報告する。

1 はじめに

投資家は、金融市場で観測される様々な情報をもとに金融資産の真の価値を探ろうとする。例えば日本国債を考えると、初めて売りに出される日、すなわち発行日における日本国債価格はプライマリーマーケット（発行市場）でただ一通りに決められていて、誰の目にも明らかである。また、満期日（償還日）における価格も額面に一致しているので（デフォルトさえしなければ）その価値は誰の目にも明らかである。しかし、発行から償還までの間にセカンダリーマーケット（二次売買市場）で売買される場合は、約定価格として市場で観測されている価格が真の価値かどうかは実際のところ確信を持ってないであろう。様々な投資家・投機家たちの価格に対する“見立て”は様々であり（だからこそ売りと買いの取引が成立するわけだが）、これは発行日から徐々に多様性を増していき、（およそ中間時点でピークに達したあとは）満期日にむけて徐々にコンセンサスが得られてきて収束していく。このような立場に立ち、Brody, Hughston and Macrina [BHM11] や Nadi Serhan Aydın [Ay17] はセカンダリーマーケットにおける複数の投資家・投機家の売買のプロセスをモデル化した。そこでは、上に述べたような情報の流れを数学的にモデル化するための自然な概念として Brownian bridge（ブラウン橋）が利用されている。

Brody, Hughston and Macrina [BHM11] では、二人の投資家・投機家がそれぞれ別の情報源から得た（従って互いに独立な）情報をもとにそれぞれが見立てた価値を算出しながら売買希望価格を提示し合い、双方が合意できたときのみ取引が成立し、市場価格が決定されていくプロセスをモデル化した。そこではマーケットメイク方式（あるいはクォートドリブン方式とも呼ばれる）のいわゆるディーラー市場を想定している。板情報を常に観測できるようなオーダードリブン方式のいわゆるオークション市場をモデル化しているわけではないという意味で簡略的ではあるが、Information-based な視点で価格形成プロセスを表現できる基本的な枠組みを提案してい

る。金融市場の様々な取引方法の整理については、林高樹・佐藤彰洋 [HaSa16] およびそのウェブサポートページ [HaSaWeb] が詳しい。

Nadi Serhan Aydm [Ay17] では、基本的に [BHM11] のモデルを踏襲しているが、“情報”の観点から実際の投資家・投機家の行動を考慮した拡張を行ない、さらに最適投資戦略まで議論している。すなわち、(潜在的な) 取引相手が提示するクォート価格を常に観測することはできないが、双方の価格が折り合って取引成立したときに限り、互いが提示した価格を知ることができるかと仮定している。つまり、自身が継続的に得ている情報だけでなく、(価格計算式を逆算することによって) 取引相手が得ているであろう情報についても取引成立のタイミングで断続的にはあるが推測することができると仮定している。この観点から、投資家・投機家が3者以上の場合へモデルを拡張する場合に気をつけなければならないことが見えてくる。

[BHM11] と [Ay17] では理論的な枠組みを構成するにとどまっており、モデルが具体的にどのような挙動を示すかについては更なる研究に委ねられている。そこで本研究では、[Ay17] に従い、二人の投機家（このモデルでは短期売買を繰り返す投機家を念頭におくので今後は投資家・投機家のかわりに“トレーダー”と書くことにする）が得る情報が独立な場合と相関がある場合とで価格形成にどのような違いが現れるかに注目し、シミュレーションによる分析を行った。ここで重要な意味を担っているのがビッド・アスク スプレッドである。

2 モデル

[BHM11] 及び [Ay17] に従いモデルを導入する。 B_t を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の標準ブラウン運動とする。 \mathbb{P} としては、 r を安全利子率として基準財 e^{rt} に対応するリスク中立測度を想定する。 $T < \infty$ を固定し、 $0 \leq t \leq T$ に対して $\beta_t \stackrel{\text{def}}{=} B_t - \frac{t}{T} B_T$ で定まる確率過程を期間 $[0, T]$ の標準ブラウン橋という。 $\beta_t \sim N(0, t(T-t)/T)$ である。

2.1 トレーダーが入手可能な情報

あらかじめ決められた満期 T においてペイオフ X_T が保有者に支払われる金融資産を考える。 X_T は \mathcal{F}_T -可測な確率変数であり、 T より前の時刻にはトレーダーは直接的に X_T の値を知ることができないかわり、 X_T に関する情報をノイズが加わっている状態で観測可能であると仮定する。さらに、 X_T と β_t は独立と仮定する。時刻 $t < T$ にトレーダーが受け取る情報 ξ_t を次のように定義する。

$$\xi_t \stackrel{\text{def}}{=} \sigma t X_T + \beta_t \quad (1)$$

ただし σ は正の定数である。トレーダーが受け取る情報は、真の値 $\sigma t X_T$ とノイズ β_t が混然一体となった量であり、トレーダーの知能（調査能力）をもってしても二つに分離することはできないと仮定する。定数 σ の大きさは、情報 ξ_t に含まれるノイズの相対的な量の大小を表しており、signal-to-noise パラメータと呼ばれる ([Ay17])。これはまた、実際にシミュレーションをして見ればわかるが、時間が経過するにつれて真の情報が明らかになるスピードを表しているので Information flow rate とも呼ばれる ([BHM11])。

ξ_t を継続的に観測しているトレーダーが持っている情報を表す増大情報系を

$$\mathcal{F}_t^\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\xi_u; 0 \leq u \leq t < T) \quad (2)$$

で表す。ここで登場した $\sigma(\xi_u)$ は ξ_u で生成される最小の σ -加法族を表し、上で導入した signal-to-noise パラメータ σ とは異なる意味で使っている。 β_t は \mathcal{F}_t^ξ -可測ではないため、トレーダーは X_T の値を直接的に観測することができない設定となっている。

2.2 金融資産の主観的価値（理論値）

2.1 節の設定で、トレーダーが入手可能な情報 \mathcal{F}_t^ξ に基づき市場で取引されている金融資産の時刻 t における主観的価値（理論価格） S_t を計算するための準備が整った。それは以下のように表される。

$$S_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_T | \mathcal{F}_t^\xi] \quad (3)$$

今後は簡単のため金利 r をゼロと仮定する。さらに [Ma06], [BHM07], [RuYu07], [Ay17] にあるように、 ξ_t は $(\mathcal{F}_t^\xi)_{t \geq 0}$ に関してマルコフ過程であることが知られており、

$$S_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_T | \xi_t] \quad (4)$$

と表すことができる。

トレーダーが入手可能な情報に基づく X_T の事後分布の確率密度関数

$$\pi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} \mathbb{P}(X_T \leq x | \xi_t) \quad (5)$$

を用いると、

$$S_t = \int_{-\infty}^{\infty} x \pi_t(x) dx \quad (6)$$

と書くことができる。 $p(x)$ を X_T の事前分布とすると、ベイズの定理より、

$$\pi_t(x) = \frac{p(x)p(\xi_t | X_T = x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(y)p(\xi_t | X_T = y)dy} \quad (7)$$

である。ここで、 $\pi_t(x)$ を具体的に計算するために尤度 $p(\xi_t | X_T = x)$ を求めておく。 $X_T = x$ の条件下で $\xi_t = \sigma t X_T + \beta_t$ の分布はその平均と分散

$$\mathbb{E}[\xi_t | X_T = x] = \sigma t x, \quad \text{Var}[\xi_t | X_T = x] = t \kappa_t^{-1}, \quad \kappa_t := T/(T-t) \quad (8)$$

から定まり、

$$p(\xi_t | X_T = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{t \kappa_t^{-1}}} \exp\left(-\frac{(\xi_t - \sigma t x)^2}{2t \kappa_t^{-1}}\right) \quad (9)$$

である。従って、(9) を (7) に代入すると事後分布は

$$\pi_t(x) = \frac{p(x) \exp\left(\kappa_t(\sigma x \xi_t - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 t)\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(y) \exp\left(\kappa_t(\sigma y \xi_t - \frac{1}{2} \sigma^2 y^2 t)\right) dy} \quad (10)$$

と表される。この密度関数は、時刻 t までに得られた情報 ξ_t に基づき、将来時刻 T におけるキャッシュフローの期待値を best-estimate する際にトレーダーが使うことができるものである。

2.3 二人のトレーダーが得られる情報

[Ay17] に従い二人のトレーダー：トレーダー 1 とトレーダー 2 を導入する。二人のトレーダーがリスク中立の立場で（従って効用関数による選好は考慮しない）、ひとつのアセットを売買しているとき、それぞれのトレーダーがアクセスできる情報が異なる場合の取引アセットの市場価格の挙動に関心がある。それぞれのトレーダーが得られる情報に基づいて推定したアセットの時刻 t におけるそれぞれの主観的価値（それぞれが正しいと考える理論価格）を S_t^1 及び S_t^2 とする。両トレーダーが受け取る情報が異なるために、一般には $S_t^1 \neq S_t^2$ となる。それぞれの理論価格に対してある一定の値幅を加減することで売値と買値を取引仲介者（第三者）に対して提示し、もし折り合いがつけば取引が成立することとする。具体的には、ある正の定数 δ を用いて

$S_t^1 + \delta \leq S_t^2 - \delta$ が成立する場合に、取引価格 $S_t^* \stackrel{\text{def}}{=} (S_t^1 + S_t^2)/2$ でトレーダー 1 が売り手、トレーダー 2 が買い手となり取引が成立し、

$S_t^2 + \delta \leq S_t^1 - \delta$ が成立する場合に、取引価格 $S_t^* \stackrel{\text{def}}{=} (S_t^2 + S_t^1)/2$ でトレーダー 1 が買い手、トレーダー 2 が売り手となり取引が成立する。

従って、マーケットメイク方式（クオートドリブン方式）のディーラーモデルを考えていることになる。また、簡単のため一度に売買するアセットは 1 単位で、空売りも可能とする。保有量に制限を設けず、最適売買戦略を考えるわけでもないので、初期 ($t = 0$) における各ディーラーの所有単位数は問題にしない。

ここで、互いに相手の提示する価格を常に知ることはできない設定となっている（即ち、板情報が常に見えるわけではない）ことに注意する。そのかわり、取引成立時点に限定して相手のクオート価格（建値）を明示的に観測することができるので、相手のビッド・アスク スプレッドを事前に知っているという前提のもとでは、相手が算出した理論値を知ることができる。それをヒントに、相手が取引成立直前に受け取っていたであろう市場情報の分布を知ることができ、次に自身が理論値を算出する際の参考とする。

トレーダー 1 が時刻 t で得ることができる市場情報を ξ_t^1 とし、トレーダー 2 の情報を ξ_t^2 とする。二人のトレーダーが得ることのできる情報について、以下の仮定をおく。

Assumption 1. β_t^1, β_t^2 を $\text{Corr}(\beta_t^1, \beta_t^2) = \rho$ を満たす $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の標準ブラウン橋とし、情報 ξ_t^1, ξ_t^2 をそれぞれ

$$\xi_t^1 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1 t X_T + \beta_t^1; \quad \xi_t^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_2 t X_T + \beta_t^2 \quad (11)$$

と仮定する。さらに、両トレーダーは入手可能な市場情報が上記の形で表されていること、及び、 σ_1, σ_2 の値を知っていると仮定する。最後に、両トレーダーが時刻 $t = 0$ において知っている X_T の事前分布は共通でその確率密度関数が $p(x)$ で表されると仮定する。

トレーダー 1 が σ_1 を知っているのみならず σ_2 まで知っているという仮定は強い仮定である。しかし、トレーダー 1 が σ_2 を知っているからこそ、トレーダー 2 が取引成立時点の直前に受け取っていたであろう情報 ξ^2 の分布を推定することができるような設定となっている。時刻 t から過去を振り返り、 t の直前で取引が成立していた時刻 s_t を次のように定義する。

$$s_t \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{s : s < t, S_s^2 - S_s^1 \geq 2\delta \text{ or } S_s^1 - S_s^2 \geq 2\delta\} \quad (12)$$

トレーダー 1 は時刻 t において、その少し前の時刻 s_t でのトレーダー 2 のクオート価格（建値）を観測することによりトレーダー 2 の likelihood (尤度) $p(\xi_{s_t}^2 | x)$ や事後分布 $\pi_{s_t}^2(x)$ を推定しようと試

みる。つまり、トレーダー 1 がアクセスできる情報は

$$\bar{\sigma}(\xi_t^1) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\xi_t^1) \vee \sigma(\xi_{s_t}^2) \quad (13)$$

であり、トレーダー 2 がアクセスできる情報は

$$\bar{\sigma}(\xi_t^2) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\xi_{s_t}^1) \vee \sigma(\xi_t^2) \quad (14)$$

である。

2.4 クォート価格の導出

取引時刻 t において、各トレーダー j ($j = 1, 2$) はそれぞれが得られた情報に基づきそれぞれが正しいと見積もる価値 S_t^j を算出し、一定のビッド・アスク スプレッドを持たせてクォート価格を提示する。いま、金利を無視しているので、

$$S_t^1 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_T | \sigma(\xi_t^1) \vee \sigma(\xi_{s_t}^2)] ; S_t^2 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_T | \sigma(\xi_{s_t}^1) \vee \sigma(\xi_t^2)] \quad (15)$$

と表すことができる。これらは事後分布を使えば次のように書くことができる。

$$S_t^1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \bar{\pi}_t^1(x) dx ; S_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x \bar{\pi}_t^2(x) dx ; \quad (16)$$

ただし

$$\bar{\pi}_t^1(x) = \frac{xp(x)p(\xi_t^1, \xi_{s_t}^2 | X_T = x)}{\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)p(\xi_t^1, \xi_{s_t}^2 | X_T = x)dx} ; \bar{\pi}_t^2(x) = \frac{xp(x)p(\xi_{s_t}^1, \xi_t^2 | X_T = x)}{\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)p(\xi_{s_t}^1, \xi_t^2 | X_T = x)dx}. \quad (17)$$

シグナル ξ_t^j はその定義 (11) により、与えられた条件 $X_T = x$ のもと

$$\xi_t^j - \sigma_j tx = \beta_t^j \sim N(0, t\kappa_t^{-1}) \quad (18)$$

であるから、

$$\xi_t^j \sim N(\sigma_j tx, t\kappa_t^{-1}) \quad (19)$$

である。Assumption 1 より

$$\beta_t^1 = \rho\beta_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2}\bar{\beta}_t, \quad \beta_t^2 \perp \bar{\beta}_t$$

と書くことができるので、時点がずれたときの相関は

$$\text{Corr}(\beta_t^1, \beta_{s_t}^2) = \frac{\text{Cov}(\beta_t^1, \beta_{s_t}^2)}{\sqrt{\text{Var}(\beta_t^1)}\sqrt{\text{Var}(\beta_{s_t}^2)}} = \frac{\text{Cov}(\rho\beta_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2}\bar{\beta}_t, \beta_{s_t}^2)}{\sqrt{t\kappa_t^{-1}}\sqrt{s_t\kappa_{s_t}^{-1}}} = \rho \frac{s_t\kappa_t^{-1}}{\sqrt{t\kappa_t^{-1}}\sqrt{s_t\kappa_{s_t}^{-1}}} = \rho \sqrt{\frac{s_t\kappa_{s_t}}{t\kappa_t}} =: \hat{\rho}.$$

ここで $\frac{s_t}{t} < 1$, $\frac{T-t}{T-s_t} < 1$ なので $|\hat{\rho}| < |\rho|$ が満たされている。 ξ_t^1 と $\xi_{s_t}^2$ の相関係数は $\hat{\rho}$ であるから、取引時刻 t の直前における各トレーダーの尤度 $\bar{p}(\xi_t^j)$ は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\bar{p}(\xi_t^1) &\stackrel{\text{def}}{=} p(\xi_t^1, \xi_{s_t}^2 | X_T = x) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{s_t\kappa_{s_t}^{-1}}\sqrt{t\kappa_t^{-1}}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}} \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{s_t\kappa_{s_t}^{-1}(\xi_t^1 - \sigma_1 x t)^2 - 2\hat{\rho}(\xi_t^1 - \sigma_1 x t)(\xi_{s_t}^2 - \sigma_2 x s_t) + t\kappa_t^{-1}(\xi_{s_t}^2 - \sigma_2 x s_t)^2}{2(1-\hat{\rho}^2)t\kappa_t^{-1}s_t\kappa_{s_t}^{-1}}\right); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}\bar{p}(\xi_t^2) &\stackrel{\text{def}}{=} p(\xi_{s_t}^1, \xi_t^2 | X_T = x) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{s_t\kappa_{s_t}^{-1}}\sqrt{t\kappa_t^{-1}}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}} \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{t\kappa_t^{-1}(\xi_t^2 - \sigma_1 x t)^2 - 2\hat{\rho}(\xi_{s_t}^1 - \sigma_1 x s_t)(\xi_t^2 - \sigma_2 x t) + s_t\kappa_{s_t}^{-1}(\xi_{s_t}^1 - \sigma_2 x s_t)^2}{2(1-\hat{\rho}^2)t\kappa_t^{-1}s_t\kappa_{s_t}^{-1}}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

これを用いると、両トレーダーの理論値（主観的価値）はそれぞれ

$$S_t^1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) \exp\left(-\frac{(\xi_t^1 - \sigma_1 x t)^2}{2t\kappa_t^{-1}} + \frac{\hat{\rho}(\xi_t^1 - \sigma_1 x t)(\xi_s^2 - \sigma_2 x s)}{\sqrt{t\kappa_t^{-1}}\sqrt{s\kappa_s^{-1}}} - \frac{(\xi_s^2 - \sigma_2 x s)^2}{2s\kappa_s^{-1}}\right) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp\left(-\frac{(\xi_t^1 - \sigma_1 x t)^2}{2t\kappa_t^{-1}} + \frac{\hat{\rho}(\xi_t^1 - \sigma_1 x t)(\xi_s^2 - \sigma_2 x s)}{\sqrt{t\kappa_t^{-1}}\sqrt{s\kappa_s^{-1}}} - \frac{(\xi_s^2 - \sigma_2 x s)^2}{2s\kappa_s^{-1}}\right) dx}; \quad (22)$$

$$S_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) \exp\left(-\frac{(\xi_s^1 - \sigma_1 x s)^2}{2s\kappa_s^{-1}} + \frac{\hat{\rho}(\xi_s^1 - \sigma_1 x s)(\xi_t^2 - \sigma_2 x t)}{\sqrt{s\kappa_s^{-1}}\sqrt{t\kappa_t^{-1}}} - \frac{(\xi_t^2 - \sigma_2 x t)^2}{2t\kappa_t^{-1}}\right) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp\left(-\frac{(\xi_s^1 - \sigma_1 x s)^2}{2s\kappa_s^{-1}} + \frac{\hat{\rho}(\xi_s^1 - \sigma_1 x s)(\xi_t^2 - \sigma_2 x t)}{\sqrt{s\kappa_s^{-1}}\sqrt{t\kappa_t^{-1}}} - \frac{(\xi_t^2 - \sigma_2 x t)^2}{2t\kappa_t^{-1}}\right) dx} \quad (23)$$

と計算できるが、さらに \exp の肩に乗っている部分をそれぞれ

$$\begin{aligned}-\frac{(\xi_t^1 - \sigma_1 x t)^2}{2t\kappa_t^{-1}} &= \kappa_t\left(-\frac{(\xi_t^1)^2}{2t} + \sigma_1 \xi_t^1 x - \frac{\sigma_1^2 x^2 t}{2}\right) \\ \frac{\hat{\rho}(\xi_t^1 - \sigma_1 x t)(\xi_s^2 - \sigma_2 x s)}{\sqrt{t\kappa_t^{-1}}\sqrt{s\kappa_s^{-1}}} &= \hat{\rho}\left(\frac{\xi_t^1 \xi_s^2}{ts} - \left(\xi_t^1 \frac{\sigma_2}{t} + \xi_s^2 \frac{\sigma_1}{s}\right)x + \sigma_1 \sigma_2 x^2\right)\sqrt{t\kappa_t}\sqrt{s\kappa_s} \\ -\frac{(\xi_s^2 - \sigma_2 x s)^2}{2s\kappa_s^{-1}} &= \kappa_s\left(-\frac{(\xi_s^2)^2}{2s} + \sigma_2 \xi_s^2 x - \frac{\sigma_2^2 x^2 s}{2}\right)\end{aligned}$$

と変形すれば S_t^1 は次のように書くことができる。

$$S_t^1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) \exp\left(\kappa_t\left(\sigma_1 \xi_t^1 x - \frac{\sigma_1^2 x^2 t}{2}\right) + \rho s \kappa_s\left(-\left(\xi_t^1 \frac{\sigma_2}{t} + \xi_s^2 \frac{\sigma_1}{s}\right)x + \sigma_1 \sigma_2 x^2\right) + \kappa_s\left(\sigma_2 \xi_s^2 x - \frac{\sigma_2^2 x^2 s}{2}\right)\right) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp\left(\kappa_t\left(\sigma_1 \xi_t^1 x - \frac{\sigma_1^2 x^2 t}{2}\right) + \rho s \kappa_s\left(-\left(\xi_t^1 \frac{\sigma_2}{t} + \xi_s^2 \frac{\sigma_1}{s}\right)x + \sigma_1 \sigma_2 x^2\right) + \kappa_s\left(\sigma_2 \xi_s^2 x - \frac{\sigma_2^2 x^2 s}{2}\right)\right) dx} \quad (24)$$

同様に S_t^2 も

$$S_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) \exp\left(\kappa_s\left(\sigma_1\xi_s^1x - \frac{\sigma_1^2x^2s}{2}\right) + \rho s\kappa_s\left(-\left(\xi_s^1\frac{\sigma_2}{s} + \xi_t^2\frac{\sigma_1}{t}\right)x + \sigma_1\sigma_2x^2\right) + \kappa_t\left(\sigma_2\xi_t^2x - \frac{\sigma_2^2x^2t}{2}\right)\right) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp\left(\kappa_s\left(\sigma_1\xi_s^1x - \frac{\sigma_1^2x^2s}{2}\right) + \rho s\kappa_s\left(-\left(\xi_s^1\frac{\sigma_2}{s} + \xi_t^2\frac{\sigma_1}{t}\right)x + \sigma_1\sigma_2x^2\right) + \kappa_t\left(\sigma_2\xi_t^2x - \frac{\sigma_2^2x^2t}{2}\right)\right) dx} \quad (25)$$

のように書ける。さて、これ以上具体的に計算を進めるためには、 X_T の事前分布 $p(x)$ の具体的な関数形を仮定する必要がある。具体的に計算を進められる典型的な例としては、ベルヌーイ分布（信用リスクのある債券に対応）と正規分布（Gaussian dividends に対応）がある。

2.4.1 X_T がベルヌーイ分布に従う確率変数の場合

満期時刻 T におけるペイオフ X_T が、ある確率 p_1 で x_1 を取り、 p_0 で x_0 となる（デフォルトする）場合を考える。(24) および (25) で x が離散的な場合に相当し

$$S_t^1 = \frac{\sum_{i=0}^1 x_i p_i \exp\left(\kappa_t\left(\sigma_1\xi_t^1x_i - \frac{\sigma_1^2x_i^2t}{2}\right) + \rho s\kappa_s\left(-\left(\xi_s^1\frac{\sigma_2}{s} + \xi_t^2\frac{\sigma_1}{s}\right)x_i + \sigma_1\sigma_2x_i^2\right) + \kappa_s\left(\sigma_2\xi_s^2x_i - \frac{\sigma_2^2x_i^2s}{2}\right)\right)}{\sum_{i=0}^1 p_i \exp\left(\kappa_t\left(\sigma_1\xi_t^1x_i - \frac{\sigma_1^2x_i^2t}{2}\right) + \rho s\kappa_s\left(-\left(\xi_s^1\frac{\sigma_2}{s} + \xi_t^2\frac{\sigma_1}{s}\right)x_i + \sigma_1\sigma_2x_i^2\right) + \kappa_s\left(\sigma_2\xi_s^2x_i - \frac{\sigma_2^2x_i^2s}{2}\right)\right)} \quad (26)$$

$$S_t^2 = \frac{\sum_{i=0}^1 x_i p_i \exp\left(\kappa_s\left(\sigma_1\xi_s^1x_i - \frac{\sigma_1^2x_i^2s}{2}\right) + \rho s\kappa_s\left(-\left(\xi_s^1\frac{\sigma_2}{s} + \xi_t^2\frac{\sigma_1}{t}\right)x_i + \sigma_1\sigma_2x_i^2\right) + \kappa_t\left(\sigma_2\xi_t^2x_i - \frac{\sigma_2^2x_i^2t}{2}\right)\right)}{\sum_{i=0}^1 p_i \exp\left(\kappa_s\left(\sigma_1\xi_s^1x_i - \frac{\sigma_1^2x_i^2s}{2}\right) + \rho s\kappa_s\left(-\left(\xi_s^1\frac{\sigma_2}{s} + \xi_t^2\frac{\sigma_1}{t}\right)x_i + \sigma_1\sigma_2x_i^2\right) + \kappa_t\left(\sigma_2\xi_t^2x_i - \frac{\sigma_2^2x_i^2t}{2}\right)\right)} \quad (27)$$

上記において $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $\rho = 0$ としたもの

$$S_t^1 = \frac{p_1 \exp\left(\kappa_t\left(\sigma_1\xi_t^1 - \frac{\sigma_1^2t}{2}\right) + \kappa_s\left(\sigma_2\xi_s^2 - \frac{\sigma_2^2s}{2}\right)\right)}{p_0 + p_1 \exp\left(\kappa_t\left(\sigma_1\xi_t^1 - \frac{\sigma_1^2t}{2}\right) + \kappa_s\left(\sigma_2\xi_s^2 - \frac{\sigma_2^2s}{2}\right)\right)} \quad (28)$$

$$S_t^2 = \frac{p_1 \exp\left(\kappa_s\left(\sigma_1\xi_s^1 - \frac{\sigma_1^2s}{2}\right) + \kappa_t\left(\sigma_2\xi_t^2 - \frac{\sigma_2^2t}{2}\right)\right)}{p_0 + p_1 \exp\left(\kappa_s\left(\sigma_1\xi_s^1 - \frac{\sigma_1^2s}{2}\right) + \kappa_t\left(\sigma_2\xi_t^2 - \frac{\sigma_2^2t}{2}\right)\right)} \quad (29)$$

が [BHM07] で信用リスクのある債券価格として紹介されている。この文脈では x_0 はデフォルト時の回収率を表す。

2.4.2 X_T が標準正規分布に従う確率変数の場合

次のような特殊な形をしたガウス型積分は、[Ay17] の 16 ページの脚注（あるいは [Mo14]）にあるように、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ax-bx^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2b+1}} \exp\left(\frac{a^2}{2(2b+1)}\right) \quad (30)$$

であることが知られている。これを利用すると (24) 式の分母は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left\{\left(\kappa_t \sigma_1 \xi_t^1 - \rho s \kappa_s \left(\xi_t^1 \frac{\sigma_2}{t} + \xi_s^2 \frac{\sigma_1}{s}\right) + \kappa_s \sigma_2 \xi_s^2\right)x - \left(\frac{\kappa_t \sigma_1^2 t}{2} - \rho s \kappa_s \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\kappa_s \sigma_2^2 s}{2}\right)x^2\right\} dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma_1^2 t \kappa_t - 2\rho s \kappa_s \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 s \kappa_s + 1}} \exp\left(\frac{(\kappa_t \sigma_1 \xi_t^1 - \rho s \kappa_s \left(\xi_t^1 \frac{\sigma_2}{t} + \xi_s^2 \frac{\sigma_1}{s}\right) + \kappa_s \sigma_2 \xi_s^2)^2}{2(\sigma_1^2 t \kappa_t - 2\rho s \kappa_s \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 s \kappa_s + 1)}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

同じく [Ay17] の 16 ページ脚注（あるいは [Mo14]）より

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ax-bx^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}a}{(2b+1)^{3/2}} \exp\left(\frac{a^2}{2(2b+1)}\right) \quad (32)$$

を利用して (24) 式の分子は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left\{\left(\kappa_t \sigma_1 \xi_t^1 - \rho s \kappa_s \left(\xi_t^1 \frac{\sigma_2}{t} + \xi_s^2 \frac{\sigma_1}{s}\right) + \kappa_s \sigma_2 \xi_s^2\right)x - \left(\frac{\kappa_t \sigma_1^2 t}{2} - \rho s \kappa_s \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\kappa_s \sigma_2^2 s}{2}\right)x^2\right\} dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}(\kappa_t \sigma_1 \xi_t^1 - \rho s \kappa_s \left(\xi_t^1 \frac{\sigma_2}{t} + \xi_s^2 \frac{\sigma_1}{s}\right) + \kappa_s \sigma_2 \xi_s^2)}{(\sigma_1^2 t \kappa_t - 2\rho s \kappa_s \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 s \kappa_s + 1)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{(\kappa_t \sigma_1 \xi_t^1 - \rho s \kappa_s \left(\xi_t^1 \frac{\sigma_2}{t} + \xi_s^2 \frac{\sigma_1}{s}\right) + \kappa_s \sigma_2 \xi_s^2)^2}{2(\sigma_1^2 t \kappa_t - 2\rho s \kappa_s \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 s \kappa_s + 1)}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

(31) と (33) を (24) に代入して

$$S_t^1 = \frac{\kappa_t \sigma_1 \xi_t^1 - \rho s \kappa_s \left(\xi_t^1 \frac{\sigma_2}{t} + \xi_s^2 \frac{\sigma_1}{s}\right) + \kappa_s \sigma_2 \xi_s^2}{\sigma_1^2 t \kappa_t - 2\rho s \kappa_s \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 s \kappa_s + 1} \quad (34)$$

である。特に $\rho = 0$ のとき

$$S_t^1 = \frac{\kappa_t \sigma_1 \xi_t^1 + \kappa_s \sigma_2 \xi_s^2}{\sigma_1^2 t \kappa_t + \sigma_2^2 s \kappa_s + 1} \quad (35)$$

となり、[Ay17] の結果と一致する。トレーダー 2 についても同様に

$$S_t^2 = \frac{\kappa_s \sigma_1 \xi_s^1 - \rho s \kappa_s \left(\xi_s^1 \frac{\sigma_2}{s} + \xi_t^2 \frac{\sigma_1}{t}\right) + \kappa_t \sigma_2 \xi_t^2}{\sigma_1^2 s \kappa_s - 2\rho s \kappa_s \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 t \kappa_t + 1} \quad (36)$$

と求められる。

3 モンテカルロ・シミュレーション

もし理論的に S_t^1 と S_t^2 が従う確率微分方程式を導出することができればそれらの確率的挙動がわかるが、確率的時間変更を付した $\xi_{s_t}^2$ に関する項の取り扱いが含まれるため容易ではない。また、我々が最終的に関心があるのはノイズに相関があり、かつ、ビッド アスク スプレッドがある場合の約定価格 S_t^* の挙動なので、解析的方法ではなくモンテカルロ・シミュレーションによる数値的分析を行う。

シミュレーションを進めるためには、確率変数 X_T のひとつの実現値とブラウン橋 β_t^1, β_t^2 のサンプルパスが必要となる。ここで X_T のサンプルを生成する際には事前分布 $p(x)$ を用いる。1 回のシミュレーションではランダムに選ばれた $\omega \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned}\xi_t^1(\omega) &= \sigma_1 t X_T(\omega) + \beta_t^1(\omega) \\ \xi_t^2(\omega) &= \sigma_2 t X_T(\omega) + \beta_t^2(\omega)\end{aligned}$$

を生成していけばよい。ここで紹介するアルゴリズムは、 X_T がベルヌーイ分布に従う確率変数の場合であるが、デフォルト時の回収率が 0% とは限らない場合を想定する¹。下のアルゴリズムは、時刻 $t = 0$ から $t = T$ までの約定価格 S^* の一本のシナリオを生成するためのものである。

Algorithm 2.

- Step 0.** 各種パラメータを事前に設定する。即ち、離散時間軸上の均等グリッドポイントの列 $0 = t_0, t_1, \dots, t_K = T$, $t_{k+1} - t_k = T/K$, 満期におけるキャッシュフロー X_T が取り得る値 $x_0 > 0, x_1 = 1$ 及びその事前確率 p_0, p_1 , パラメータ σ_1, σ_2 , 相関パラメータ ρ , パラメータ σ_1, σ_2 , 相関係数 ρ , ビッド・アスク スプレッド δ をそれぞれ設定する。変数を初期値 $k = 0, s_t = 0$ に設定する。
- Step 1.** 満期 T でのキャッシュフロー値 X_T をモンテカルロ・シミュレーションにより生成する。
- Step 2.** 互いに相関 ρ を持つブラウン橋のサンプルパス $\{\beta_t^1, t \leq T\}, \{\beta_t^2, t \leq T\}$ をモンテカルロ・シミュレーションにより生成する。
- Step 3.** $k = k + 1$ とする。時刻 $t = t_k = t_{k-1} + T/K$ において、ディーラー 1 について、 $\sigma(\xi_t^1) \vee \sigma(\xi_{s_t}^2)$ にもとづき S_t^1 を計算し、ディーラー 2 について、 $\sigma(\xi_{s_t}^1) \vee \sigma(\xi_t^2)$ にもとづき S_t^2 を計算する。
- Step 4.** 各トレーダーの建値をもとに *Central clearing party* が取引の有無を判定し取引価格を決める。取引成立の場合、取引時刻 $s_t = t$ と約定価格 S_t^* を保存する。取引不成立の場合、Step 5 へ行く。
- Step 5.** $t = T$ でない限り、Step 3 へ戻り計算を続ける。 $t = T$ の場合は売買取引を行わず、終了する。

多数のシナリオを生成するためには、Step 1. から Step 5. までを複数回繰り返せばよい。我々の数値実験では、 $T = 1$ 年, $K = 250$ を固定し、その他のパラメータ $x_0, \sigma_1, \sigma_2, \rho, \delta$ を動かすことで S^* の確率的挙動や取引成立確率などを調べることにする。

ρ の解釈は自明でないかもしれない。 ρ はトレーダー 1 と 2 が受け取る情報に含まれる pure noise β_t^1 と β_t^2 の間の相関なので、正の相関の場合は両者とも同じ方向へバイアスがかかった情報を受け取りがちであることを意味している。また、負の相関の場合は一方がノイズが多い時は他方がノイズの少ない情報を受け取りがちということなので、得られる情報に非対称性があるような状況を想定している。

¹ここでは回収率は確率変数ではなく確定的な値とする。

Remark 3. 一般に、ブラウン橋 β_t はブラウン運動 B_t を使って

$$\beta_t = B_t - \int_0^t \frac{B_T - B_s}{T - s} ds \quad a.s.$$

と表されることが知られている。 β_t が $\mathcal{F}_t^B \vee \sigma(B_T)$ -可測であることは

$$\int_0^t \frac{|B_T - B_s|}{T - s} ds < \infty$$

と同値であり、 $s < T$ を満たさなければ発散することからモンテカルロ・シミュレーションは $t_{K-1} = T - T/K$ で止めることになる。 $t_K = T$ では $S_T^* = X_T$ となる。

3.1 理論価格のサンプルシナリオ

モデルの挙動を理解する手始めとして、理論価格のサンプルパスをいくつか生成してみよう。下の2枚のグラフは $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = 0, x_0 = 0.2, x_1 = 1, p_0 = 0.3, p_1 = 0.7, \delta = 0$ の場合の S_t^1 の推移を、左右のパネルにそれぞれ7本のシナリオを描いたものである。

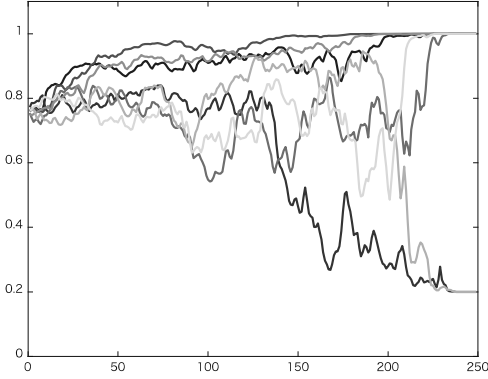


Figure 1: シナリオ 1~7

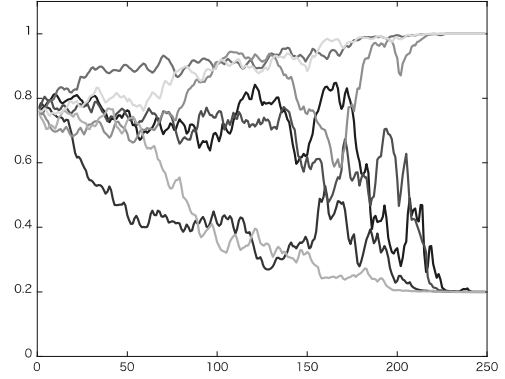


Figure 2: シナリオ 8~14

ビッド・アスク スプレッドをゼロに設定しているので取引は常に成立する。従って $s_t = t - T/K = t - 1/250$ である。また、初めて取引が成立した時刻は $t = 1/250$ でそのときの取引価格 (初値) $S_{1/250}^1$ は、5章で導入するベースラインの $t = 1/250$ での値 $\tilde{S}_{1/250}^1$ 具体的には 0.759784041 ($X_T = x_0$ が実現した場合) あるいは 0.760215848 ($X_T = x_1$ が実現した場合) に近い値となっている。満期 T に近づくときノイズ β^1, β^2 が 0 に近づくため、トレーダーが受け取る情報は X_T の真の値を多く含むようになる。従って満期の少し手前から S_t^1 は X_T の実現値に非常に近い値となっていく。パラメータ σ が相対的に大きければ早い段階で真の X_T に近づき、小さければ満期の直前になるまで X_T から遠いところを推移していく。

取引が頻繁に成立するほど、 S_t^1 は ξ_t^1 のみならず $\xi_{s_t}^2$ の影響も受け、 S_t^2 は ξ_t^2 のみならず $\xi_{s_t}^1$ の影響を受ける。下の Figure 3 は $\rho = 0.5$ の場合の1組の β_t^1, β_t^2 の推移をプロットしたものであり、Figure 4 は $x_0 = 0.2, x_1 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.5, \delta = 0.025$ の場合にグラフ3の β_t^1, β_t^2 を受けて算出さ

れた S_t^1, S_t^2 の推移を示している。ノイズ間の相関が 0.5 であるにもかかわらずアセット間の標本相関は高くなり、この例では 0.917 となる。これは、取引が成立したとき取引相手の情報も次の理論価格を提示する際に利用されているために両者の理論価格が似通ってくるためと考えられる。このように、 β_t^1, β_t^2 の相関 ρ がそのままアセット間の相関とはならない点にも注意を払いたい。

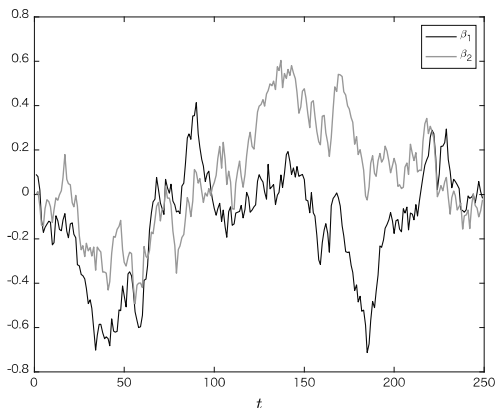


Figure 3: $\rho = 0.5$ の場合の β_t^1, β_t^2

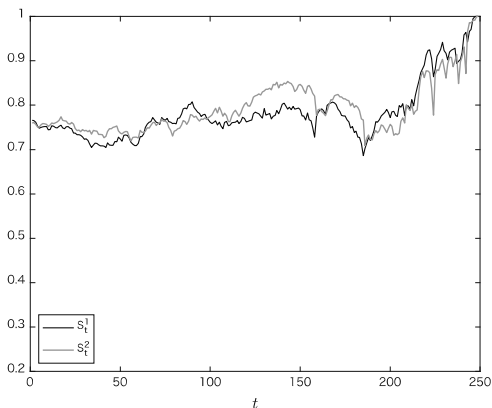


Figure 4: S_t^1, S_t^2 のサンプルパス

4 取引成立確率

ビッド・アスク スプレッドがゼロの場合、トレーダー $j(j = 1, 2)$ が提示するビッド価格とアスク価格はともに S_t^j に一致するので、必ず取引成立条件が満たされ取引が成立し、(どちらのトレーダーが売り手になるかは独立に) その取引価格は $S_t^* = (S_t^1 + S_t^2)/2$ となる。しかし、両者のビッド・アスク スプレッドが大きくなるにつれ、取引が成立するチャンスは減っていく。ビッド・アスク スプレッド δ と取引成立確率の関係について、3 章のモンテカルロ・シミュレーションを用いて数値的に考察を行う。

Figure 5 では $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, x_1 = 1, x_0 = 0.2, p_1 = 0.7, p_0 = 0.3$ と固定した場合に、1 本のシナリオ毎に区間 $[0, T]$ の間に取引が何回成立したかを数え、10000 回のシナリオについて平均をとった値をプロットしている。ビッド・アスク スプレッド δ (横軸) が大きくなるにつれ、取引成立確率 (縦軸) は減っていく様子が見て取れる。我々のモデルでは取引成立条件を「両者が提示する建値が 2δ 以上離れていること」と仮定していたことを思い出すと、相関 ρ が高ければ両トレーダーがの建値が近づくため取引成立のチャンスは減り、 δ が増加するにつれてその傾向はより強まることがわかる。ある一定水準以上に δ が大きくなればそもそも取引成立は稀なイベントとなるため、どのような ρ であれ、 δ の増加に対する取引成立確率の減少の割合は緩やかになっていく。

一方で、取引成立確率は σ_1, σ_2 の値にも依存していると予想される。ここでは考えやすくするため $\sigma := \sigma_1 = \sigma_2$ と仮定して σ を変化させる。Figure 6 には、 $x_1 = 1, x_0 = 0.2, p_1 = 0.7, p_0 = 0.3, \delta = 0.001$ と固定した場合に、 ρ と σ を変化させた場合の取引成立確率を縦軸にプロットしている。全体的な傾向として、 σ の値が小さい場合は相関が 1.0 に近い方が取引が成立しやすくなっており、逆に σ の値が大きい時には相関が -1.0 に近い方が取引が成立しやすくなっている。おおよそ $\sigma \leq 1.0$ の範囲では σ が小さくなれば取引成立確率が下がる傾向にある。これは、

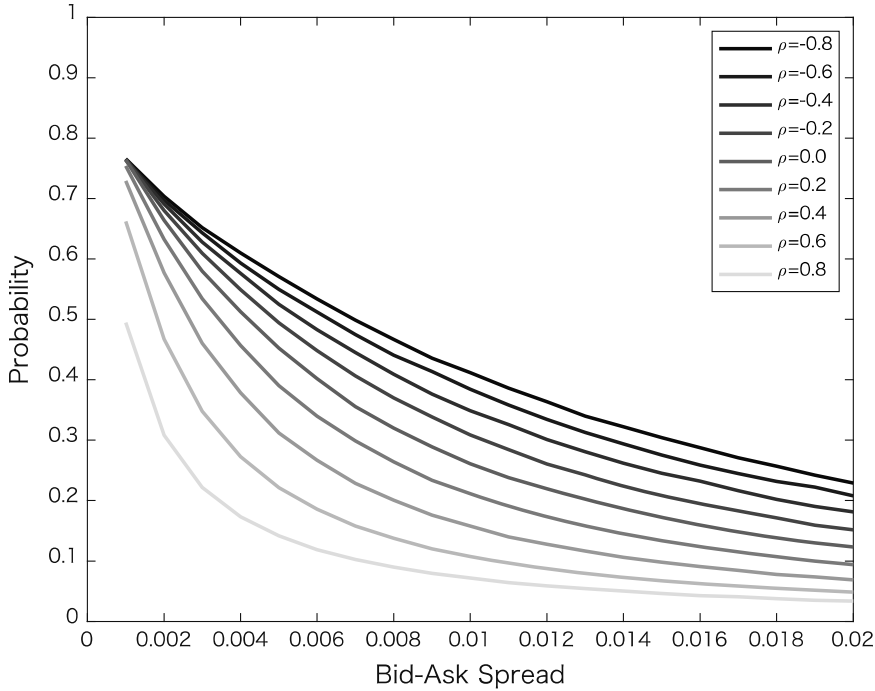


Figure 5: ビッド・アスク スプレッドを動かしたときの取引成立確率

$\lim_{\sigma \rightarrow 0} S^1(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} S^2(\sigma) = \frac{p_0 x_0 + p_1 x_1}{p_0 + p_1} = \sum_i p(x_i) x_i = \mathbb{E}[X_T]$ であることから両トレーダーの提示する建値が似かよってきて取引が成立しにくくなると考えれば良い。一方、 $\sigma > 2.0$ の場合であるが（より詳細には、あとでベースラインの議論のところで明らかにしていくが）、 σ が大きくなればなるほど、各トレーダーは比較的早い段階で $X_T(\omega)$ の方向がわかるようになる。つまり両トレーダーが提示する建値に差が生じにくくなるため取引成立確率が下がっていく。 $1.0 \leq \sigma \leq 2.0$ はその中間的な位置付けで、ノイズ間の相関によって様子が大きく変化している。 σ の値が小さい場合は両トレーダーの提示する建値の差が小さくなりやすいのだが、この傾向は相関が高いほど増幅されることも理由のひとつと考えられる。

Figure 7 には、ある 1 セットの S^1, S^2 のサンプルパスについて、時間変更 $t \mapsto s_t$ のグラフをプロットしている。このシミュレーションでは時間の最小単位を $1/250$ と設定しているので、 s_t は少なくとも $1/250$ だけ t より遅れて進むことになる。取引が成立しない間は留まり、新たに取引成立した場合に $s_t = t - 1/250$ まで追いつく。ビッド・アスク・スプレッドが大きければそれだけ取引成立のチャンスが少なくなるので s_t が t に遅れることが多くなる。

5 理論価格 S_t^1 の挙動についての考察

ディーラー 1 が算出する理論価格 S_t^1 がどのような確率的挙動を示すのか考察する。そのためには S_t^1 を $\beta_t^1, \beta_{s_t}^2$ の関数として見るのが有効である。(24) 式に $\xi_t^1 = \sigma_1 t X_T + \beta_t^1$, $\xi_{s_t}^2 = \sigma_2 s_t X_T + \beta_{s_t}^2$

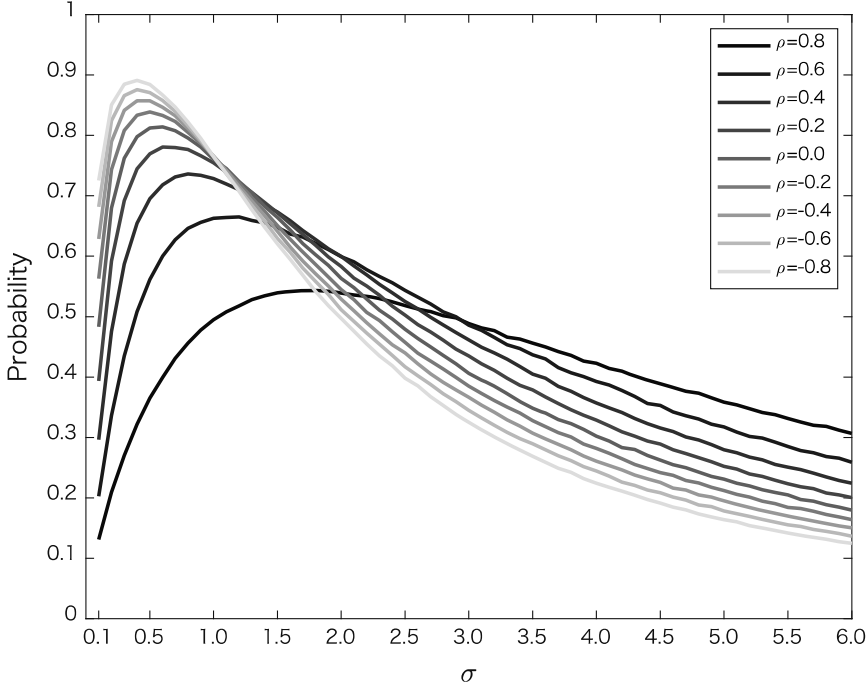


Figure 6: $\delta = 0.001$ に固定した場合の取引成立確率

を代入して $\beta_t^1, \beta_{s_t}^2$ に影響を受ける部分とそうでない部分とを分けて整理すると

$$S_t^1 = x_0 \bar{\pi}_t^1(x_0) + x_1 \bar{\pi}_t^1(x_1), \quad (1)$$

$$\bar{\pi}_t^1(x_0) = \frac{p_0 \exp\left(f(x_0, X_T) + (g_t \beta_t^1 + h_{s_t} \beta_{s_t}^2) x_0\right)}{p_0 \exp\left(f(x_0, X_T) + (g_t \beta_t^1 + h_{s_t} \beta_{s_t}^2) x_0\right) + p_1 \exp\left(f(x_1, X_T) + (g_t \beta_t^1 + h_{s_t} \beta_{s_t}^2) x_1\right)}, \quad (2)$$

$$\bar{\pi}_t^1(x_1) = \frac{p_1 \exp\left(f(x_1, X_T) + (g_t \beta_t^1 + h_{s_t} \beta_{s_t}^2) x_1\right)}{p_0 \exp\left(f(x_0, X_T) + (g_t \beta_t^1 + h_{s_t} \beta_{s_t}^2) x_0\right) + p_1 \exp\left(f(x_1, X_T) + (g_t \beta_t^1 + h_{s_t} \beta_{s_t}^2) x_1\right)} \quad (3)$$

と表すことができる。ただし、以下の様に定めた。ここで、表記の簡略化のため s_t を s とだけ記している。

$$f(x, X_T) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_t \left(\sigma_1^2 t x X_T - \frac{\sigma_1^2 t x^2}{2} \right) + \rho s \kappa_s \sigma_1 \sigma_2 (x^2 - 2x X_T) + \kappa_s \left(\sigma_2^2 s x X_T - \frac{\sigma_2^2 s x^2}{2} \right), \quad (4)$$

$$g_t \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_t \sigma_1 - \rho s \kappa_s \frac{\sigma_2}{t}, \quad (5)$$

$$h_s \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_s \sigma_2 - \rho s \kappa_s \frac{\sigma_1}{s}. \quad (6)$$

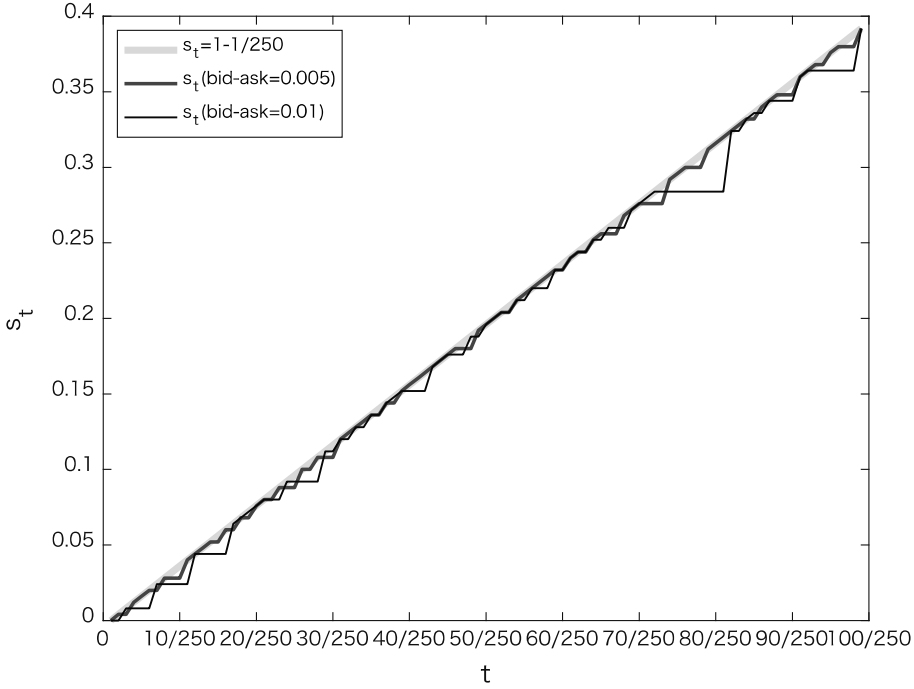


Figure 7: 時間変更 $t \mapsto s_t$ (直近の取引成立時刻)

$f(x, X_T), g_t, h_s$ は $\beta_t^1, \beta_{s_t}^2$ に寄らない量で、仮に全ての $t \in [0, T)$ および $s_t < t$ に対して $\beta_t^1 = \beta_{s_t}^2 = 0$ であれば

$$\bar{S}_t^1 = \frac{p_0 x_0 \exp(f(x_0, X_T)) + p_1 x_1 \exp(f(x_1, X_T))}{p_0 \exp(f(x_0, X_T)) + p_1 \exp(f(x_1, X_T))} \quad (7)$$

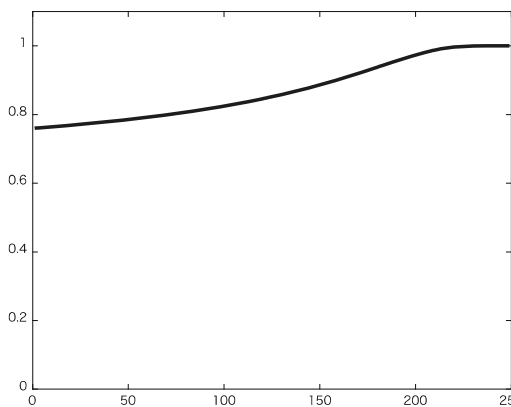
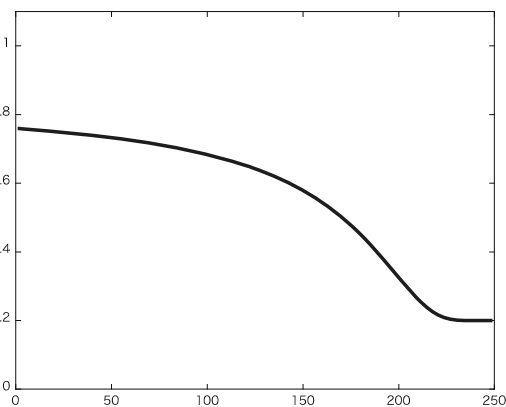
となり、このとき \bar{S}_t^1 は X_T の実現値に依存して確定的に推移していく。下の図の左側は $X_T = x_1 = 1$ の場合、右側は $X_T = x_0 = 0.1$ の場合の例である。この曲線

$$t \mapsto \bar{S}_t^1$$

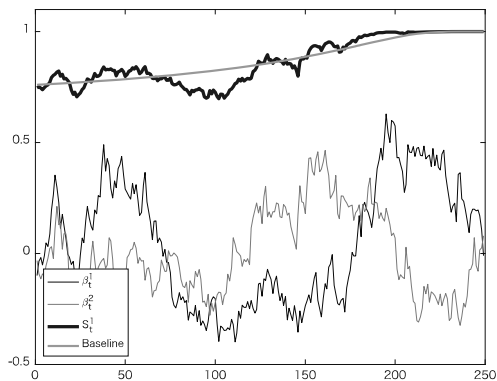
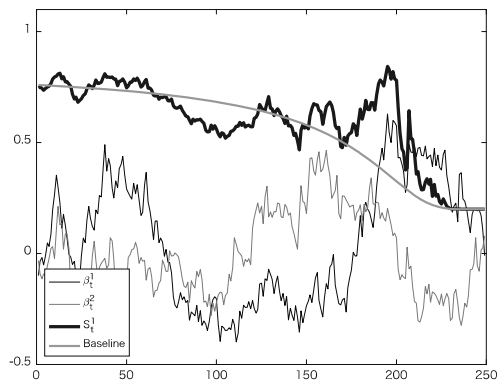
をベースラインと呼ぶことにする。長期的なトレンドとしては価格 S_t^1 はこのベースライン付近を推移することになる。

ところで、(1) 式から $\pi_t^1(x_0) + \pi_t^1(x_1) = 1$ に注意すると $x_0 \leq S_t^1 \leq x_1, a.s.$ が成立することがわかる。従って、トレーダーにとって $\mathbb{P}(X_T = x_0) = p_0$ という前提知識は有用なものであることがわかる。

次に β_t^1, β_s^2 の効果も考え合わせると、 x_1, x_0 ともに正であったので $g_t \beta_t^1 + h_s \beta_s^2 > 0$ であれば S_t^1 は $\beta_t^1 = \beta_{s_t}^2 = 0$ のベースラインより上側へ、 $g_t \beta_t^1 + h_s \beta_s^2 < 0$ であればベースラインの下側へ推

Figure 8: $X_T(\omega) = x_1 = 1$ のベースラインFigure 9: $X_T(\omega) = x_0 = 0.2$ のベースライン

移することになる。これは $f(x, X_T)$ の正負に係わらず言えることである。定義より $s = s_t < t$ なので $\kappa_s < \kappa_t$ であることを思い出すと、もし $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ であれば $g_t > h_s$ が成立する。よってトレーダー 1 にとっては、取引相手のノイズ β_s^2 と比べて、自身が受け取る β_t^1 のほうにより強い影響を受けることとなり（もちろん σ_2 が σ_1 よりも十分大きければこれは成り立たない）、定性的な性質として好ましいであろう。下の 2 枚の図は、共通のシナリオ β_t^1, β_s^2 に対して、 X_T の実現値が x_1 の場合 (Figure. 10) と x_0 の場合 (Figure. 11) について、 S_t^1 のサンプルパス 1 本とベースラインを示したものである。

Figure 10: $X_T(\omega) = x_1$ Figure 11: $X_T(\omega) = x_0$

上のグラフを一見すると、 S_t^1 は β_t^1 に連動して推移しているように見える。しかし、ノイズ間の相関 ρ がある場合はトレーダーが受け取る情報 ξ_t^1 の挙動だけで S_t^1 の確率的挙動が決定されるとは限らないことが確認できる。実際、 $S_t^1 = S^1(\xi_t^1, \xi_{s_t}^2, t)$ のように確定的な関数 S^1 を使って書け

ていたとすると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z^1} S^1(z^1, z^2, t) &= \sum_{i=0}^1 x_i \frac{\partial}{\partial z^1} \bar{\pi}^1(x_i | z^1, z^2) \\
 &= \sum_{i=0}^1 x_i \left(\kappa_t \sigma_1 - \rho s_t \kappa_{s_t} \frac{\sigma_2}{t} \right) (x_i - S^1(z^1, z^2, t)) \bar{\pi}^1(x_i | z^1, z^2) \\
 &= \left(\kappa_t \sigma_1 - \rho s_t \kappa_{s_t} \frac{\sigma_2}{t} \right) \sum_{i=0}^1 x_i (x_i - \mathbb{E}[X_T | \xi_t^1 = z^1, \xi_{s_t}^2 = z^2]) \bar{\pi}^1(x_i | z^1, z^2) \\
 &= \left(\kappa_t \sigma_1 - \rho s_t \kappa_{s_t} \frac{\sigma_2}{t} \right) \text{Var}[X_T | \xi_t^1 = z^1, \xi_{s_t}^2 = z^2]
 \end{aligned}$$

であるから、 $\text{Var}[X_T | \xi_t^1 = z^1, \xi_{s_t}^2 = z^2] > 0$ から $\kappa_t \sigma_1 - \rho s_t \kappa_{s_t} \frac{\sigma_2}{t}$ の正負が $\frac{\partial}{\partial z^1} H^1(z^1, z^2, t)$ の符号を決めることがわかる。もし $\rho \geq 0$ であれば $\kappa_t \sigma_1 - \rho s_t \kappa_{s_t} \frac{\sigma_2}{t} > 0$ となり $S_t^1 = S^1(\xi_t^1, \xi_t^2, t)$ は ξ_t^1 に関して単調増加関数である。つまり、 β_t^1 が増加すれば S_t^1 は増加する、と言った単純な挙動を示す。このとき $\xi^2(\beta^2)$ の影響は受けない。 ξ^2 の情報を活用するのはトレーダー 2 であるから、この事実は自明のように見える。しかし $\rho > 0$ のとき $\sigma_1 = \sigma_2$ であっても $\rho \frac{\sigma_2}{t} > 1$ であれば $\kappa_t \sigma_1 - \rho s_t \kappa_{s_t} \frac{\sigma_2}{t} < 0$ となる場合がある。これは、相関 ρ が非常に高く、頻繁に取引が成立している場合である。もし $\sigma_1 < \sigma_2$ が成り立つ場合はさらに容易に $\kappa_t \sigma_1 - \rho s_t \kappa_{s_t} \frac{\sigma_2}{t} < 0$ となるであろう。つまり、 $\beta_t^1, \beta_{s_t}^2$ とともに減少しているにも拘らず、 S_t^1 が増加する場合が存在し得ることに注意が必要である。

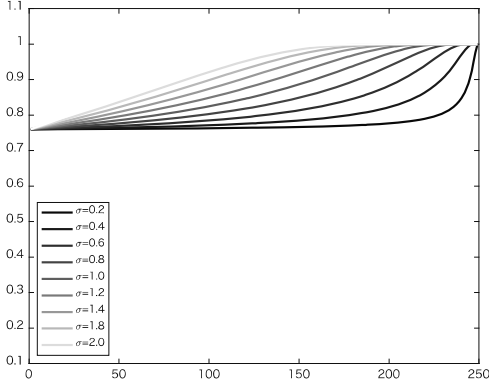
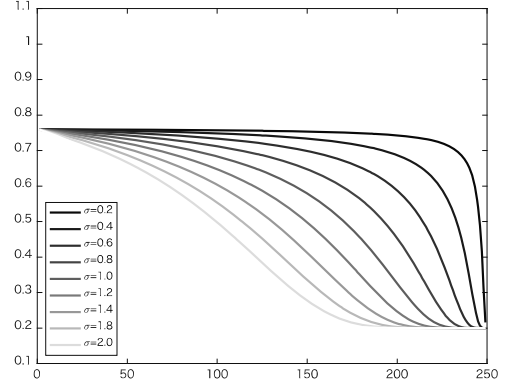
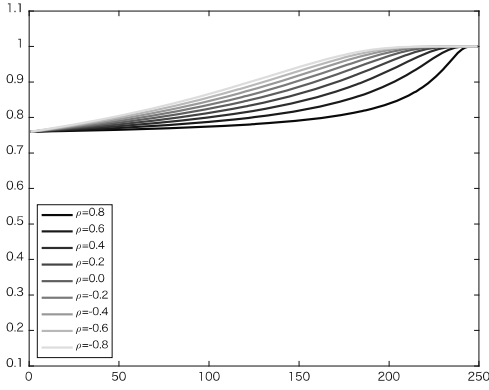
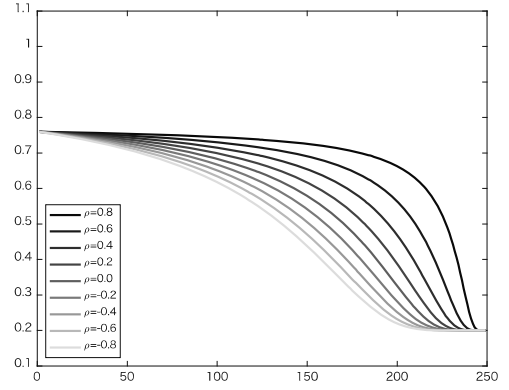
5.1 ベースラインの挙動

パラメータを動かしたときのベースラインのグラフを以下に示す。Figure 12 では $X_T(\omega) = x_1$ の場合に $\sigma_1 = \sigma_2 =: \sigma$ を保ちながら $\sigma = 0.2, 0.4, \dots, 2.0$ と 0.2 刻みで動かしたときのベースラインの変化の様子を濃淡で表示している。 σ が大きくなると市場参加者の情報の質が上がり、早いペースで X_T の真の値（即ち x_1 ）に到達している様子が見て取れる。Figure 13 は $X_T(\omega) = x_0$ の場合に $\sigma_1 = \sigma_2 =: \sigma$ を保ちながら σ を 0.2 刻みで動かしたときのベースラインである。 σ が非常に小さければ、それだけ情報の質が劣ることになるので、デフォルトするシナリオに直前まで気がつかない様子が見て取れる。

Figure 13 では $X_T(\omega) = x_1$ の場合に $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$ のときに $\rho = -0.8$ から $+0.8$ まで 0.2 刻みで動かしたときのベースラインの変化の様子を濃淡で表示している。 ρ は小さければ早いペースで X_T の真の値（即ち x_1 ）に到達している様子が見て取れる。Figure 14 は $X_T(\omega) = x_0$ の場合に $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$ のときに ρ を 0.2 刻みで動かしたときのベースラインである。 ρ が大きければ、それだけ情報の質が劣ることになるので、デフォルトするシナリオに直前まで気がつかない様子が見て取れる。

5.2 ノイズの相関 ρ とベースラインの形状

モンテカルロ・シミュレーションの結果から、ノイズの相関 ρ によってベースラインの形状が異なることが見れたわけだが、それは以下のように確認できる。ベースライン $t \mapsto \bar{S}_t^1$ を決定づける事後確率 $\bar{\pi}_t^1(x_0), \bar{\pi}_t^1(x_1)$ を次のように定める。これは $\pi_t^1(x_0), \pi_t^1(x_1)$ で $\beta_t^1 = \beta_{s_t}^2 = 0$ としたも

Figure 12: $X_T(\omega) = x_1(\sigma$ を動かした場合)Figure 13: $X_T(\omega) = x_0(\sigma$ を動かした場合)Figure 14: $X_T(\omega) = x_1(\rho$ を動かした場合)Figure 15: $X_T(\omega) = x_0(\rho$ を動かした場合)

のに対応する。

$$\bar{\pi}_t^1(x_i) = \frac{p_0 \exp(f(x_i, X_T))}{p_0 \exp(f(x_i, X_T)) + p_1 \exp(f(x_i, X_T))}. \quad (8)$$

ρ による変化を見るため偏微分すると

$$\frac{\partial \bar{\pi}_t^1(x_0)}{\partial \rho} = \frac{s\kappa_s \sigma_1 \sigma_2 (x_0^2 - x_1^2 - 2x_0 X_T + 2x_1 X_T) p_0 p_1 \exp(f(x_0, X_T) + f(x_1, X_T))}{[p_0 \exp(f(x_0, X_T)) + p_1 \exp(f(x_0, X_T))]^2} \quad (9)$$

ここで分子を見ると、 $s\kappa_s \sigma_1 \sigma_2 p_0 p_1 \exp(f(x_0, X_T) + f(x_1, X_T)) > 0$ より $\frac{\partial \bar{\pi}_t^1(x_0)}{\partial \rho}$ の符号は $(x_0^2 - x_1^2 - 2x_0 X_T + 2x_1 X_T) = (x_0 + x_1 - 2X_T)(x_0 - x_1)$ の符号と一致する。常に $x_0 - x_1 < 0$ である

ことから次のことがわかる。

- $X_T(\omega) = x_0$ の場合: $x_0 + x_1 - 2X_T = x_1 - x_0 > 0$ より $\frac{\partial \pi_t^1(x_0)}{\partial \rho} > 0$
 従って、相関 ρ が 1 に近くにつれ $\pi_t^1(x_0)$ の値は小さくなり、 $\pi_t^1(x_1) = 1 - \pi_t^1(x_0)$ の値は大きくなる。
 これは、トレーダー 1 が真実 $X_T(\omega) = x_0$ を間違える確率が増加することを意味し、それだけ真実に気づくまでに時間がかかるということになる。
- $X_T(\omega) = x_1$ の場合: $x_0 + x_1 - 2X_T = x_0 - x_1 < 0$ より $\frac{\partial \pi_t^1(x_0)}{\partial \rho} < 0$
 従って、相関 ρ が 1 に近くにつれ $\pi_t^1(x_0)$ の値は大きくなり、 $\pi_t^1(x_1) = 1 - \pi_t^1(x_0)$ の値は小さくなる。
 これは、トレーダー 1 が真実 $X_T(\omega) = x_1$ を間違える確率が増加することを意味し、それだけ真実に気づくまでに時間がかかるということになる。

6 取引価格のボラティリティについての考察

前の章ではひとりのトレーダーが算出する理論値の確率的挙動について考察したが、最終的な我々の関心は取引価格の確率的挙動にある。それは、とくにビッド・アスク スプレッドの非線形な関数となるため、解析的な分析は今後の課題とし、ここではモンテカルロ・シミュレーションによる数値的な考察を行う。次の Figure 16 は、 $\sigma_2 = 1$ を固定し相関 ρ と σ_1 を動かしたときの取引価格のボラティリティをプロットしたグラフである。このグラフから次のようなことが読み取れる。

- S_t^* のボラティリティを決めているのは σ_i ではなくノイズの相関 ρ のほうである。
- ノイズの相関 ρ が高くなると 2 人のトレーダーは似たような情報を受け取るので提示する価格が近づき、bid-ask spread ほどの差が生じないことが増えてきて、取引が成立しなくなる傾向にある。結果的に約定価格は穏やかに変化し、そのボラティリティは小さくなる傾向にある。
- ノイズの相関 ρ が低くなると互いに逆の情報を受け取るので提示する価格は離れるが、同時にトレーダーは賢くなるため、その約定価格はその中間点（つまりほぼベースライン上）に落ちつく。従って、結果的にボラティリティは低くなる。
- $\sigma_1 = 1$ 近辺では 2 人のトレーダーの賢さが同等となり、とくに相関が高いところでは、最初の取引成立まで時間がかかってしまう。

なお、相関が高いときにグラフの左側が奇妙な挙動を示しているが、これは次のような理由と考えられる。両トレーダーが同じような情報を受け取るためにほぼ同水準の主観価値を算出している。従って最初に取引成立するまで時間がかかり、たとえ取引成立となってもその後も取引は成立しにくい状況が続く。標本ボラティリティを算出するために用いる時系列データは、最初取引成立してから T までの取引価格を用いているため、ボラティリティが高く算出される傾向にある。しかし、 $[0, T]$ に取引が数回しか成立しないような状況は一般には考えにくいいため、例外的な状況と解釈する。

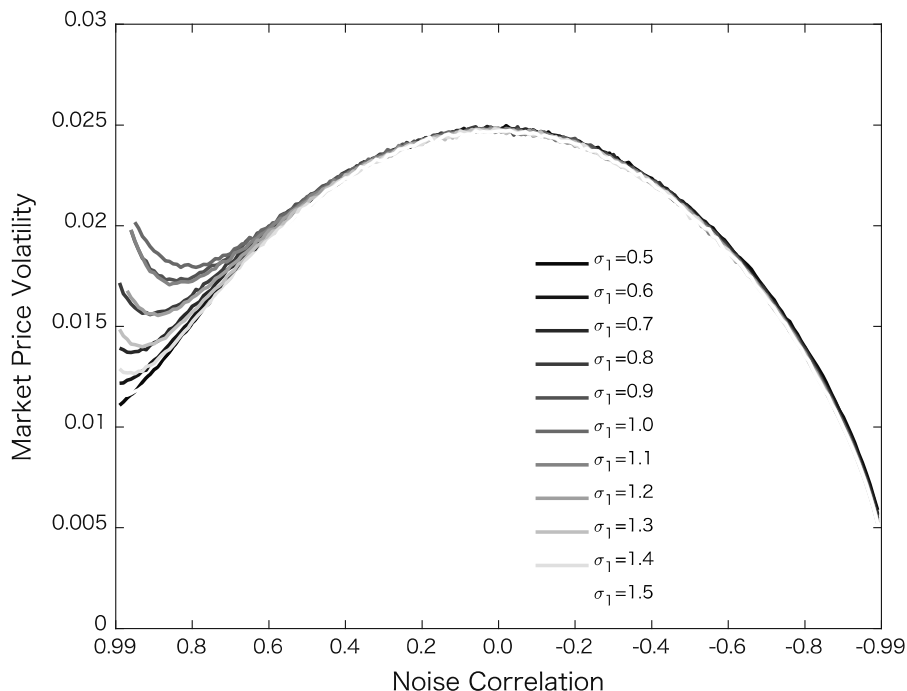


Figure 16: $\sigma_2 = 1$ を固定し相関 ρ と σ_1 を動かしたときの取引価格のボラティリティ

7 今後の研究

ビッド・アスク スプレッドがゼロより大きい場合、取引成立した場合にのみ約定価格が動く。ビッド・アスク スプレッドに対して、約定価格のボラティリティがどのように変化するかにも興味がある。 S_t^1, S_t^2 が満たす確率微分方程式を導出できれば、解析的に議論ができるであろう。また、Assumption 1 で仮定したように、ディーラー 1 が σ_2 を、ディーラー 2 が σ_1 を、それぞれ事前に知っているという設定を緩めた場合についても興味がある。売買取引を進めながらトレーダー 1 は σ_2 を、トレーダー 2 は σ_1 を推定するよう拡張できると考えている。また、最初からトレーダー 1 と 2 が持っている事前分布に差がある場合の取引価格の挙動や投資行動、あるいは効率的な数値計算の方法などにも興味がある。さらには、トレーダーが 3 人以上のモデルやアセットが 2 種類以上の場合の最適化問題など、様々な方向への発展性があるモデルと考えている。これらのうちいくつかはすでに研究に着手しており、別の機会にご報告したい。

References

- [Ay17] Nadi Serhan Aydın (2017), *Financial Modelling with Forward-looking Information - An Intuitive Approach to Asset Pricing*, Springer International Publishing. (doi: 10.1007/978-3-319-57147-8)

- [BHM11] Dorje C. Brody, Lane P. Hughston & Andrea Macrina (2011), *Modelling Information Flows in Financial Markets*, In: Di Nunno G., Øksendal B. (eds) *Advanced Mathematical Methods for Finance*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [BHM08] Dorje C. Brody, Lane P. Hughston & Andrea Macrina (2008), *Information-based Asset Pricing*, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol.11, p.107-142.
- [BHM07] Dorje C. Brody, Lane P. Hughston & Andrea Macrina (2007), *Beyond Hazard Rates: A New Framework for Credit-Risk Modelling*, *Advances in Mathematical Finance*, Editors: Fu, Jarrow, Yen, Elliott, Publisher: Birkhauser Verlag, p.231-257.
- [Ma06] Andrea Macrina (2006), *An Information-based Framework for Asset Pricing; X-factor theory and its Applications*, , Ph.D. Thesis, University of London.
- [Mo14] Victor H. Moll (2014-2015), *Special Integrals of Gradshteyn and Ryzhik: the Proofs Vol. 1-2*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics.
- [RuYu07] Marek Rutkowski & Nannan Yu (2007), *An Extension of the Brody-Hughston-Macrina Approach to Modeling of Defaultable Bonds*, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol.10, p.557-589.
- [HaSa16] 林高樹, 佐藤彰洋 (2016), 金融市場の高頻度データ分析 ―データ処理・モデリング・実証分析―, ファイナンス・ライブラリー 13, 朝倉書店.
- [HaSaWeb] 林高樹, 佐藤彰洋 (2016), [HaSa16] のウェブサポートページ, 市場取引のメカニズム
URL: <http://www.asakura.co.jp/websupport/978-4-254-29543-6/>

Department of Information Sciences, Toho University
 Miyama 2-2-1, Funabashi, Chiba 274-8510, Japan
 E-mail address: hideyuki.takada@is.sci.toho-u.ac.jp

東邦大学理学部 近藤快地 高田英行 福田健太